ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)
Semestre d'automne — 2024-2025

Série 1: Systèmes linéaires I

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) reconnaître un **système d'équations linéaires (SEL)** et l'écrire sous **forme matricielle** ;

(O.2) **représenter graphiquement les solutions** d'un SEL avec 2 variables ;

(O.3) connaître les SEL **incompatibles** et **compatibles**, **déterminés** et **indéterminés** ;

(O.4) connaître la notion de **SEL équivalents**, les **opérations élémentaires**, leur propriété fondamentale, et les **matrices échelonnées** et **échelonnées réduites**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- système d'équations linéaires (SEL)
- représentation matricielle d'un SEL
- SEL compatible in/déterminé
- opération élémentaire sur les lignes
- forme/matrice échelonnée
- solution d'un SEL
- matrice augmentée
- SEL incompatible
- SEL équivalents
- forme/matrice échelonnée réduite

Exercice 1 (Équations linéaires et non linéaires)
Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

(a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$;

(b) $2^2 x_1 + 2^2 x_2 = 1$;

(c) $\sqrt{3}x_1 + \left(1-\sqrt{2}\right)x_2 + 3 = \pi x_1$;

(d) $3x_1 + 2x_2 + 4x_3x_4 = 5$;

(e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}x_3 + x_9$.

Exercice 2 (Systèmes d'équations linéaires)
Remplissez les informations manquantes pour chacun des systèmes linéaires ci-dessous.

(a) $m = \_$ équations et $n = \_$ variables,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & & & + & 4x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & & & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{array}{lll} a_{1,1} = \_, & a_{1,2} = \_, & a_{1,3} = \_, \\ a_{2,1} = \_, & a_{2,2} = \_, & a_{2,3} = \_, \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} b_1 = \_, \\ b_2 = \_. \end{array}$$

Vérifier que $(-2, 2, \frac{11}{4})$ est une solution du SEL précédent.
Est-ce que $(-2, 1, \frac{11}{4})$ est une solution du SEL précédent ?

(b) $m =$ __ équations et $n =$ __ variables,

$$\begin{cases} x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & = & -1/2, \\ 2x_1 & - & x_2 & = & -5, \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{1,1} = \_\_, & a_{1,2} = \_\_, \\ a_{2,1} = \_\_, & a_{2,2} = \_\_, \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_, \\ b_2 = \_\_. \end{matrix}$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

(c) $m =$ __ équations et $n =$ __ variables,

$$\begin{cases} -x_1 & + & 2x_2 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & = & 3, \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{1,1} = \_\_, & a_{1,2} = \_\_, \\ a_{2,1} = \_\_, & a_{2,2} = \_\_, \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_, \\ b_2 = \_\_. \end{matrix}$$

Vérifier que $(2, 1)$ est une solution du SEL précédent. Donner la/les solution(s) du système s'il y en a d'autres.

(d) $m =$ __ équations et $n =$ __ variables,

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & = & 1, \\ x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & = & \frac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{1,1} = \_\_, & a_{1,2} = \_\_, \\ a_{2,1} = \_\_, & a_{2,2} = \_\_, \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_, \\ b_2 = \_\_. \end{matrix}$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

Exercice 3 (Représentation graphique I)
Soient les deux droites d'équations respectives $\frac{1}{2}x_1 - 3x_2 = 6$ et $x_1 + 2x_2 = 4$. Représenter graphiquement les deux équations dans un systèmes d'axes x_1 et x_2 et déterminer le point d'intersection de ces deux droites.

Exercice 4 (Représentation graphique II)
On considère l'équation $ax_1 + bx_2 = 2$.

(a) Représenter dans le plan les solutions pour les valeurs $a = 2$ et $b = -1$.
(b) Représenter dans le plan les solutions pour les valeurs $a = 1$ et $b = 2$.
(c) Estimer géométriquement la solution du système

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & = & 2, \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 2, \end{cases}$$

à partir des items précédents, et résoudre le système.

Exercice 5 (Représentation graphique III)
Considérons l'équation suivante

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 1.$$

(a) Dessiner la solution pour les paramètres $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.
(b) Pour quelles valeurs de α, β la droite $\alpha x_1 + \beta x_2 = 1$ est-elle parallèle à la droite $-x_1 + x_2 = -1$?
(c) Trouver les valeurs de α, β (si elles existent) telles que le SEL

$$\begin{cases} -x_1 & + & x_2 & = & -1, \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & 1, \\ (\alpha - 1)x_1 & + & (\beta + 1)x_2 & = & 0, \end{cases}$$

(i) possède une infinité de solutions ;
(ii) ne possède aucune solution ;
(iii) possède une solution unique.

Exercice 6 (Représentation graphique IV)
Considérons le SEL

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases}$$

(a) Est-ce que le système est compatible ?
(b) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Exercice 7 (Formes ER de matrices carrées de taille 3)
Déterminer toutes les matrices carrées échelonnées réduites de taille 3.

Exercice 8 (V/F sur systèmes d'équations linéaires)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse. V F

(a) Un SEL avec trois équations à 5 inconnues admet au moins une solution. ☐ ☐
(b) Un SEL avec cinq équations à 3 inconnues n'admet aucune solution. ☐ ☐
(c) L'équation $\sqrt{2}x + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues. ☐ ☐
(d) L'équation $2\sqrt{x} + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues. ☐ ☐
(e) L'équation $\cos(x) = 0$ est une équation linéaire à une inconnue. ☐ ☐
(f) L'équation $x = 1$ est une équation linéaire à une inconnue, les équations $y = -1$ et $z = 5$ également, mais le système d'équations ☐ ☐

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = 5, \end{cases}$$

est un SEL de trois équations à trois inconnues.

Exercice 9 (V/F sur opérations élémentaires et ensemble des solutions)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse. V F

(a) Toutes les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles. ☐ ☐
(b) Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice augmentée ne changent jamais l'ensemble des solutions du SEL associé. ☐ ☐
(c) Une matrice de taille 5×6 a 6 lignes. ☐ ☐
(d) L'ensemble des solutions d'un SEL en les variables $x_1, \ldots, x_n$ est une liste de nombres $(s_1, \ldots, s_n)$ qui, substitués à $x_1, \ldots, x_n$ respectivement, rendent correcte chaque équation du SEL. ☐ ☐
(e) L'existence et l'unicité d'une solution sont deux questions fondamentales pour un SEL. ☐ ☐

(f) Un SEL incompatible a plus d'une solution. ☐ ☐